ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale
et de la Jeunesse

Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs

Session 2004

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Concours **TSI**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours TSI,
comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

PREMIER PROBLÈME

Dans ce problème, $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. La matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est notée I_2.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A. On note enfin $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Première partie

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice A.
2. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ et $\operatorname{Ker}(f - 3\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.
3. Construire une base (e'_1, e'_2) de $\mathbb{R}^2$ avec $e'_1 \in \operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ et $e'_2 \in \operatorname{Ker}(f - 3\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$.
4. Écrire la matrice D de f dans la base (e'_1, e'_2).
5. En déduire qu'il existe une matrice P, inversible d'ordre 2, telle que $A = PDP^{-1}$; expliciter P et P^{-1}.
6. Pour tout entier naturel non nul n, calculer la matrice D^n puis en déduire l'expression de A^n sous forme de tableau matriciel.

Deuxième partie

Pour tout entier naturel n et tout réel t, on note $E_n(t)$ la matrice définie par

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k,$$

avec la convention $A^0 = I_2$.

Cette matrice sera écrite sous la forme $E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$.

1. Expliciter les coefficients $a_n(t),\ b_n(t),\ c_n(t)$ et $d_n(t)$ de la matrice $E_n(t)$.
2. (a) Rappeler le développement en série entière da la fonction exponentielle.
   (b) Justifier que les suites $\big(a_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}},\ \big(b_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}},\ \big(c_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(d_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et expliciter leur limites respectives notées $a(t),\ b(t),\ c(t)$ et $d(t)$.

   Dans la suite, on pose $E(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$

3. Montrer qu'il existe deux matrices Q et R, éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, telles que
$$E(t) = e^{2t}Q + e^{3t}R.$$

4. (a) Que vaut la matrices $Q + R$? Et la matrice $2Q + 3R$?
   (b) Montrer que, pour tout réel t, $E(t)$ est une combinaison linéaire des matrices A et I_2.

5. Calculer les matrices Q^2, R^2, QR et RQ.

6. Montrer que, pour tout couple (s, t) de réels, $E(s)E(t) = E(s+t) = E(t)E(s)$. En déduire que $E(t)$ est inversible et donner son inverse.

7. Montrer que l'application $t \longmapsto E(t)$, de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, est injective.

Troisième partie

On considère le système (S) d'équations différentielles
$$(S) \quad \begin{cases} x' = x + y \\ y' = -2x + 4y \end{cases}$$

On appelle solution du système (S) tout couple (u, v) de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel t, on ait
$$\begin{cases} u'(t) = u(t) + v(t) \\ v'(t) = -2u(t) + 4v(t) \end{cases}$$

1. Soit (u, v) une solution de (S) ; pour tout réel t, on pose
$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} = E(-t) \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$$
   (a) Exprimer les réels $u_1(t)$ et $v_1(t)$ à l'aide de $u(t)$, $v(t)$ et des coefficients de la matrice $E(-t)$.
   (b) En déduire que les fonctions u_1 et v_1 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer leurs dérivées.

2. Montrer alors que (u, v) est une solution de (S) si et seulement s'ilexiste un couple (α, β) de réels tels que, pour tout réel t, on ait $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = E(t) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

SECOND PROBLÈME

Dans ce problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $\mathcal{F}$ la partie de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ formée des matrices $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$ vérifiant
$$a_{1,3} = 0 \quad \text{et} \quad a_{1,2} + a_{2,3} = 0.$$

1. Vérifier que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.

2. Montrer que si le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ est égal à 0 ou 1, alors A est semblable, dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, à un élément de $\mathcal{F}$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ une matrice de rang 2. On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ canoniquement associé à A.
   (a) Donner les dimensions du noyau $\operatorname{Ker} f$ et de l'image $\operatorname{Im} f$ de f.

(b) Montrer que $\operatorname{Ker} f \cup \operatorname{Im} f \subsetneq \mathbb{K}^3$.

(c) On suppose que pour tout vecteur $v \in \mathbb{K}^3 \setminus (\operatorname{Ker} f \cup \operatorname{Im} f)$, la famille $(f(v), f^2(v))$ est liée. Écrire la matrice de f dans une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{K}^3$, choisie telle que $e_2 \in \mathbb{K}^3 \setminus (\operatorname{Ker} f \cup \operatorname{Im} f)$ et $e_3 = f(e_2)$, puis en déduire que A est semblable, dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, à un élément de $\mathcal{F}$.

(d) Si, au contraire, il existe un vecteur $e \in \mathbb{K}^3 \setminus (\operatorname{Ker} f \cup \operatorname{Im} f)$ tel que la famille $(f(e), f^2(e))$ soit libre. Montrer que la famille $(f^2(e), f(e), -e)$ est une base de $\mathbb{K}^3$ et en déduire que A est semblable, dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, à un élément de $\mathcal{F}$.

4. Soient A, B et C des éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.

(a) On suppose que les matrices B et C sont semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. Montrer que, pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, les matrices $(B + \lambda I_3)$ et $(C + \lambda I_3)$ sont semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.

(b) On suppose ici que A possède une valeur propre dans $\mathbb{K}$. Montrer qu'elle est semblable, dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, à un élément de $\mathcal{F}$.

5. Ici on prend $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$; soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ une matrice qui n'a pas de valeur propre dans $\mathbb{K}$. On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ canoniquement associé à A. Soit enfin v un vecteur non nul de $\mathbb{K}^3$.

(a) Montrer que la famille $(v, f(v))$ est libre.

(b) Montrer que la famille $(v, f(v), f^2(v))$ est aussi libre. (*on pourra raisonner par l'absurde*)

(c) Construire une base de $\mathbb{K}^3$ dans laquelle la matrice de f appartient à $\mathcal{F}$ et en déduire que la matrice A est semblable, dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, à un élément de $\mathcal{F}$.

6. On considère les matrices

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Caractériser les éléments de l'image de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ par l'application $X \longmapsto XR - RX$.

(b) En déduire que tout élément A de $\mathcal{F}$ peut s'écrire sous la forme $A = \lambda E + RB - BR$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.

(c) Montrer, en utilisant les résultats qui précèdent, qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ est de trace nulle si et seulement si elle est de la forme $A = BC - CB$ avec $(B, C) \in \left(\mathcal{M}_3(\mathbb{K})\right)^2$.

FIN DE L'ÉPREUVE